6. Έστω $V(x,y,z) = xyz$, $x,y,z > 0$

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του όγκου πάνω στην επιφάνεια

$S : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+2y+z=84\}$

Λύση: Έχω $2x+2y+z=84 \Rightarrow z = 84-2x-2y$

, οπότε $\Phi = V|_S = xy(84-2x-2y)$, και είναι:

$$\nabla \Phi = \bar{0} \iff \begin{cases} 84y - 4xy - 2y^2 = 0 \\ 84x - 2x^2 - 4xy = 0 \end{cases} \xRightarrow{x,y>0} (x,y) = (14,14)$$

μοναδική λύση

Έχω:

$$H_\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} -4y & -4y-4x+84 \\ -4y-4x+84 & -4x \end{pmatrix} \quad \forall (x,y)$$

και άρα, $\frac{d^2\Phi}{dx^2}(14,14) < 0$ και $\det(H_\Phi(14,14)) > 0$, οπότε

$H_\Phi$ αρνητικά ορισμένος και άρα το σημείο $(14,14)$ είναι σημείο μεγίστου.